

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**Н.Р. Стронгина**

**КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»**  
**Методы решения краевых задач,**  
**основанные на решении задач оптимизации:**  
**примеры вариационно-проекционных методов**  
**(Модуль 14.1)**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией  
Института информационных технологий, математики и механики  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород  
2021

УДК 519.6  
ББК 22.19  
С-86

С-86 Стронгина Н.Р. Курс «Численные методы»: Методы решения краевых задач, основанные на решении задач оптимизации: примеры вариационно-проекционных методов (Модуль 14.1): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 35 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.А. Перов**

Пособие является компонентом учебно-методического комплекса по дисциплине «Численные методы». В пособии показаны принципы дискретизации дифференциальных краевых задач на основе вариационно-проекционного подхода. В качестве примера рассмотрено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с однородными линейными граничными условиями и базис подпространства численных решений, составленный из конечного числа аналитических функций. Современные методы данного класса, способные решить краевые задачи в многомерных и нерегулярных пространственных областях, ориентированы на применение ЭВМ и сеточных базисных функции с компактным носителем. При этом принципы дискретизации краевых задач сохраняют преимущество.

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», а также для преподавателей.

Ответственный за выпуск:  
председатель методической комиссии  
Института информационных технологий, математики и механики ННГУ  
к.ф.-м.н., доцент **А.В. Грезина**

УДК 519.6  
ББК 22.19

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Модуль 14.1. Методы решения краевых задач, основанные на решении задач оптимизации: примеры вариационно-проекционных методов....	7
14.1.1. Сведение краевых задач к задачам с однородными граничными условиями .....	7
14.1.2. Метод Бубнова-Галеркина .....	8
14.1.3. Метод коллокации .....	12
14.1.4. Метод наименьших квадратов (для дифференциальных уравнений) .....	13
14.1.5. Конечномерный метод наименьших квадратов (для решения дифференциальных уравнений) .....	20
Модуль 14.1 – Практикум по теме «Методы решения краевых задач, основанные на решении задач оптимизации: примеры вариационно-проекционных методов» .....	26
Пример 1 - Метод Бубнова-Галеркина .....	26
Пример 2 - Метод наименьших квадратов .....	31
Литература .....	34

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники и последующее развитие высокопроизводительных вычислительных систем открывают качественно новые возможности изучения сложных реальных объектов методами вычислительного эксперимента [11, 12].

Машинный вычислительный эксперимент как новый метод научного исследования предполагает дискретизацию исходной задачи. Он требует специальной проработки численного алгоритма: корректность, устойчивость, точность, сходимость. Поэтому на современном этапе подготовки выпускников по направлению «Прикладная математика и информатика» основной целью освоения дисциплины «Численные методы» является изучение фундаментальных принципов построения численных алгоритмов, подходов к анализу их свойств, подготовка студентов к разработке и применению эффективных вычислительных комплексов, необходимых для математического моделирования сложных систем.

В Институте информационных технологий, математики и механики ННГУ в системе подготовки бакалавров по указанному выше направлению дисциплина «Численные методы» изучается на 3-м курсе в течение двух семестров. Обучение включает лекции, практические и лабораторные занятия, самостоятельную работу, зачеты и экзамен. Содержание дисциплины соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов и обновляется с учетом проблематики научных исследований и технологий программирования. Фундаментальные основы курса соответствует требованиям типовой программы по направлению «Прикладная математика и информатика», разработанной под руководством академика РАН А.А. Самарского [13].

Курс содержит изучение основ машинной арифметики, анализ структуры погрешности, подходы и методы приближенного вычисления функций, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение систем линейных алгебраических уравнений, задач на собственные значения, решение нелинейных алгебраических уравнений и систем. Особое внимание уделяется инструментам математического моделирования сложных систем: методам численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), решению уравнений в частных производных, а также структуре соответствующих вычислительных комплексов.

В связи с успешным применением в ННГУ практико-ориентированного подхода и на основе принципа «образование как исследование», вытекающего из положения Гумбольдта «образование на основе исследований» [11], фундаментальный курс «Численные методы» имеет в ННГУ уровневую

структуру. С одной стороны, в нем представлены все основные разделы численного анализа. С другой стороны, актуальные приложения требуют одновременного использования разных методов. Поэтому основой курса является системное изучение модельных задач, описывающих свойства реальных объектов различной природы. Освоение разделов дисциплины построено таким образом, чтобы в течение каждого семестра студенты могли самостоятельно подготовить программную реализацию численного алгоритма для решения модельной задачи, провести вычислительный эксперимент и подготовить отчет.

Нижегородский государственный университет является участником Суперкомпьютерного консорциума университетов России [12]. Студентов 3-го курса, изучающих дисциплину «Численные методы», знакомят с подходами к организации параллельных вычислений. Глубокое изучение этих подходов опирается на тот же комплект модельных задач, но проводится на старших курсах после освоения дисциплин, посвященных технологиям и методам параллельного программирования.

При освоении курса «Численные методы» у студентов 3-го курса должны быть сформированы компетенции разработки и применения программных средств разного уровня сложности. Поэтому требования к программам, подготовленным студентами, также реализуют практико-ориентированный подход. Программа должна быть написана на алгоритмическом языке высокого уровня. Код, реализующий алгоритм, должен быть подготовлен студентом самостоятельно. Объектно-ориентированный подход приветствуется. Программа и способ работы с ней должны быть пригодны не только для выполнения конкретного расчета, но также для проверки корректной реализации метода и результатов вычислительного эксперимента, и затем для изучения свойств метода и свойств моделируемого объекта. Ряд заданий выполняются с помощью специальной программы-тренажера, затем – с помощью программы, подготовленной студентом.

Требования самостоятельной программной реализации алгоритма и последующего самостоятельного проведения вычислительного эксперимента предполагают, что при рассмотрении теоретического материала, проведении практических занятий, выполнении заданий в рамках самостоятельной работы необходимо уделить больше внимания анализу понятийного аппарата дисциплины, доказательной базе, рассмотрению «простых» примеров и разбору по шагам решений специально подобранных задач. Решение именно этой учебной задачи поддерживает предлагаемое пособие.

Изучение тематического модуля, представленного в пособии, опирается на дисциплины «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Геометрия и алгебра» и «Программирование на ЭВМ» и осуществляется

одновременно с изучением дисциплин «Уравнения математической физики» и «Функциональный анализ».

Нумерация разделов пособия соответствует установленной в настоящее время нумерации тематических модулей электронного учебного курса «Численные методы», представленного в системе электронного обучения ННГУ (СЭО ННГУ) на базе платформы Moodle. В период весеннего семестра 2019-20 учебного года и осеннего семестра 2020-21 учебного года дистанционная организация учебного процесса по дисциплине «Численные методы» выстраивалась на базе этого электронного курса [14].

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих курс «Численные методы», и преподавателей.

Материал пособия может быть полезен студентам, изучающим в вузе численные методы на различных направлениях подготовки, а также студентам магистратуры ИИТММ, изучающим параллельные численные методы на основе технологий параллельного программирования.

## Модуль 14.1. Примеры методов решения краевых задач, основанных на решении задач оптимизации: вариационно-проекционные методы

### 14.1.1. Сведение краевых задач к задачам с однородными граничными условиями

Вариационно-проекционные численные методы, рассмотренные в этом модуле, предназначены для решения **широкого класса линейных дифференциальных уравнений с линейными однородными граничными условиями**.

Указанные методы используются также для решения **нелинейных дифференциальных уравнений**, существенно, чтобы **граничные условия были линейными и однородными**.

Основные принципы вариационно-проекционных методов обычно рассматривают на примере краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Поэтому именно на таком примере покажем, как дифференциальное уравнение с **линейными неоднородными граничными условиями** свести к дифференциальному уравнению с **линейными однородными граничными условиями**.

Пусть  $w(x)$  при  $x \in [0; 1]$  – искомое решение линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с линейными неоднородными граничными условиями:

$$\begin{cases} w'' + x w' + w = -5x^2 \\ w(0) = 1, w(1) = 0 \end{cases} \quad (14.1)$$

Решение задачи (14.1) ищем в виде

$$w(x) = u(x) + \eta(x).$$

Функцию  $\eta(x)$  подбираем так, чтобы для нее выполнялись условия, указанные в (14.1):

$$\eta(0) = 1, \eta(1) = 0.$$

В качестве такой функции можно выбрать, например,  $\eta(x) = 1 - x^2$ .

Тогда решение задачи (14.1), то есть функцию  $w(x)$ , запишем в виде

$$w(x) = u(x) + 1 - x^2. \quad (14.2)$$

Подставим (14.2) в (14.1):

$$\begin{cases} u'' + (1 - x^2)'' + x \cdot u' + x \cdot (1 - x^2)' + u + (1 - x^2) = -5x^2 \\ u(0) + 1 = 1, u(1) + 0 = 0 \end{cases}$$

Перепишем задачу:

$$\begin{cases} u'' + x \cdot u' + u + \{-2 - 2x^2 + 1 - x^2\} = -5x^2 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

Для неизвестной функции  $u(x)$ ,  $x \in [0; 1]$ , получим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с линейными однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} u'' + x u' + u = 1 - 2x^2 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

После того, как решение (14.3) будет получено, решение (14.1) запишем в виде

$$w(x) = u(x) + 1 - x^2$$

Таким образом, за счет выбора функции, удовлетворяющей неоднородным граничным условиям, дифференциальную задачу с линейными неоднородными граничными условиями сводим к задаче с линейными **однородными** граничными условиями.

#### 14.1.2. Метод Бубнова-Галеркина

Пусть  $H$  и  $K$  – гильбертовы пространства, такие, что  $K \subset H$ .

Пусть  $L$  – линейный дифференциальный оператор,

который действует из пространства  $K$  в пространство  $H$ .

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение общего вида

$$Lu = f \quad (14.4)$$

Правая часть уравнения задана и является элементом пространства  $H$ :  $f \in H$ .

Решение уравнения ищем в пространстве  $K$ :  $u \in K \subset H$ .

Дополним задачу линейными однородными граничными условиями,

которые в общем случае запишем как

$$lu = 0. \quad (14.5)$$

Через  $l$  обозначен линейный (в общем случае дифференциальный) оператор, «отвечающий» за граничные условия.

Далее рассмотрим **краевую задачу: линейное дифференциальное уравнение (14.4) с линейными однородными граничными условиями (14.5):**

$$\begin{cases} Lu = f \\ lu = 0 \end{cases} \quad (14.6)$$

Метод приближенного решения задач класса (14.6), предложенный Бубновым и Галёркиным, состоит в следующем.

В бесконечномерном гильбертовом пространстве  $K$  выбирают конечное число линейно независимых функций  $\varphi_i \in K, i = 1, \dots, n$ , каждая из которых соответствует линейным однородным граничным условиям задачи:

$$l\varphi_i = 0, i = 1, \dots, n. \quad (14.7)$$

Эти функции используются как базис для построения конечномерного подпространства  $K_n$  (оно имеет размерность  $n$ ):



$$K_n = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \in R, \varphi_i \in K, l\varphi_i = 0, i = 1, \dots, n \right\} \quad (14.8)$$

Такое подпространство вложено и в пространство  $K$ , и в пространство  $H$ :

$$K_n \subset K \subset H$$

Запись (14.8) означает, что каждый элемент подпространства  $K_n$  может быть представлен линейной комбинацией базисных функций:

если  $\varphi \in K_n$ , то существует такой набор коэффициентов  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ , что

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n.$$

**Утверждение 1.** Все элементы подпространства  $K_n$  соответствуют граничным условиям задачи (14.6): если  $\varphi \in K_n$ ,

$$l\varphi = 0 \quad (14.9)$$

Свойство (14.9) вытекает из того, что граничные условия линейны и однородны:

$$l\varphi = l \left[ \underbrace{\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n}_{\substack{\text{линейный оператор} \\ \text{применили к линейной} \\ \text{комбинации элементов}}} \right] = \underbrace{\alpha_1 [l\varphi_1] + \alpha_2 [l\varphi_2] + \dots + \alpha_n [l\varphi_n]}_{\substack{\text{получили линейную комбинацию} \\ \text{результатов применения оператора} \\ \text{к каждому из элементов}}} = 0$$

**Приближенное решение задачи (14.6) будет найдено как элемент  $K_n$ .**

**Обозначим его через  $v$  и запишем в виде**

$$v = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n \quad (14.10)$$

**Очевидно, что  $v$  соответствует граничным условиям (14.6):**

$$lv = \alpha_1 [l\varphi_1] + \alpha_2 [l\varphi_2] + \dots + \alpha_n [l\varphi_n] = 0 \quad (14.11)$$

**Определение 1.** Невязкой дифференциального уравнения (14.4) на приближенном решении  $v$  называется выражение

$$Lv - f \quad (14.12)$$

**Принцип Бубнова-Галеркина** состоит в следующем:

**Определение 2.** Приближенное решение  $v$  задачи (14.6), найденное в классе  $K_n$  методом Бубнова-Галеркина, должно обеспечить **ортогональность невязки всем базисным функциям.**

$$(Lv - f, \varphi_i)_H = 0, i = 1, \dots, n \quad (14.13)$$

Здесь символом  $(*,*)_H$  обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $H$ .

**Утверждение 2.** В соответствии с методом Бубнова-Галеркина коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ , определяющие приближенное решение  $v$  как элемент конечномерного подпространства  $K_n$  по формуле (14.10), следует искать как решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} (L\varphi_1, \varphi_1)_H & (L\varphi_2, \varphi_1)_H & \dots & (L\varphi_n, \varphi_1)_H \\ (L\varphi_1, \varphi_2)_H & (L\varphi_2, \varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_n, \varphi_2)_H \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (L\varphi_1, \varphi_n)_H & (L\varphi_2, \varphi_n)_H & \dots & (L\varphi_n, \varphi_n)_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_1)_H \\ (f, \varphi_2)_H \\ \dots \\ (f, \varphi_n)_H \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

### Доказательство

Запишем невязку дифференциального уравнения (14.4) на приближенном решении  $v$  по определению, подставим решение  $v$  в виде (14.10) и воспользуемся свойством линейности дифференциального оператора  $L$ :

$$Lv - f = L \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i}_{\text{линейный оператор применили к линейной комбинации элементов и получили линейную комбинацию результатов применения оператора к каждому из элементов}} - f = \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] - f \quad (14.15)$$

Таким образом, невязка на приближенном решении  $v$  записана через коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ .

Подставим (14.15) в формулы (14.13) – условия ортогональности невязки всем базисным функциям:

$$(Lv - f, \varphi_i)_H = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j [L\varphi_j] - f, \varphi_i \right)_H = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (14.16)$$

Уравнения (14.16) можно записывать как разности двух скалярных произведений, и каждая разность должна быть равна нулю:

$$\left( \sum_{j=1}^n \alpha_j [L\varphi_j], \varphi_i \right)_H - (f, \varphi_i)_H = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (14.17)$$

В каждом из уравнений (14.17) приравниваем скалярные произведения:

$$\left( \sum_{j=1}^n \alpha_j [L\varphi_j], \varphi_i \right)_H = (f, \varphi_i)_H, \quad i = 1, \dots, n \quad (14.18)$$

Далее используем их **линейные свойства**.

Сначала из-под знака скалярного произведения выносим знак суммирования:

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j [L\varphi_j], \varphi_i)_H = (f, \varphi_i)_H, \quad i = 1, \dots, n \quad (14.19)$$

Затем из-под знаков скалярных произведений выносим коэффициенты  $\alpha_j, j = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j (L\varphi_j, \varphi_i)_H = (f, \varphi_i)_H, i = 1, \dots, n \quad (14.20)$$

Система уравнений (14.20) представляет собой СЛАУ с **неизвестными**  $\alpha_j, j = 1, \dots, n$ . Если СЛАУ записать в векторном виде, получим (14.14).

## Комментарии

**Идея метода такова:** в гильбертовых пространствах  $H$  и  $K$  есть бесконечномерные базисы. **Функция «тождественный ноль» ортогональна всем базисным функциям.**

Если бы удалось найти  $u$  – точное решение задачи (14.6), то невязка на данном решении, то есть  $Lu - f$ , была бы «тождественный ноль».

**Невязка на точном решении, то есть  $Lu - f$ , ортогональна всем элементам бесконечномерного базиса:**

$$(Lu - f, \hat{\varphi}_i)_H = 0, i = 1, 2, \dots, \text{ где } \hat{\varphi}_i, i = 1, 2, \dots, \text{ – базис в } H.$$

Так как нет универсального способа решить систему уравнений бесконечной размерности, выбираем конечномерное подпространство  $K_n \subset K \subset H$  с конечным базисом.

**Требуем, чтобы невязка на приближенном решении, то есть  $Lv - f$ , где  $v \in K_n$  – приближенное решение, была ортогональна всем элементам конечномерного базиса в  $K_n$ :**

$$(Lv - f, \varphi_i)_H = 0, i = 1, \dots, n, \text{ где } \varphi_i, i = 1, \dots, n \text{ – базис в } K_n.$$

**Чтобы повысить точность решения, нужно увеличить размерность подпространства  $K_n$  или изменить набор базисных функций.**

В тот период, когда метод разрабатывался (первая половина XX столетия), в качестве базисных функций использовались **тригонометрические функции и полиномы.**

Современные проекционные методы – в частности, **метод конечных элементов (МКЭ)**, развивают предложенный подход.

В определенном смысле МКЭ – это метод Бубнова-Галеркина, в котором **в качестве базиса конечномерного подпространства используются сеточные функции с компактным носителем.** Такие функции отличны от нуля в небольшом числе узлов сетки и равны нулю в большинстве узлов сетки.

Чем гуще сетка, тем больше базисных функций и больше неизвестных коэффициентов. Поэтому для отыскания коэффициентов  $\alpha_j, j = 1, \dots, n$  нужно решить СЛАУ большой размерности.

В силу того, каждая базисная функция отлична от нуля на небольшом участке сетки, матрица СЛАУ для МКЭ является разреженной.

Поэтому такие СЛАУ решают **итерационными методами линейной алгебры**.

### 14.1.3. Метод коллокации

Данный метод отличается от предыдущего метода **принципом подбора приближенного решения  $v$  в подпространстве  $K_n$** .

Как и в предыдущем случае, приближенное решение задачи (14.6) будет найдено в виде линейной комбинации базисных функций:

$$v = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n \quad (14.21)$$

Соответствие базисных функций граничным условиям (14.6):  $l\varphi_i = 0, i = 1, \dots, n$ , обеспечивает точное соответствие приближенного решения  $v$  граничным условиям данной задачи:  $lv = \alpha_1 [l\varphi_1] + \alpha_2 [l\varphi_2] + \dots + \alpha_n [l\varphi_n] = 0$ .

**Чтобы найти  $v$ , в области определения искомого решения выбирают систему точек коллокации. Количество таких точек должно совпадать с размерностью подпространства  $K_n$ . Обозначим их через  $x_j, j = 1, \dots, n$ .**

**Определение 3. Метод коллокации** состоит в следующем: приближенное решение  $v$ , найденное в классе  $K_n$ , должно обеспечить **нулевую невязку дифференциального уравнения на системе точек коллокации**:

$$Lv - f = 0 \text{ для всех } x_j, j = 1, \dots, n \quad (14.22)$$

**Утверждение 3.** В соответствии с методом коллокации коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ , определяющие приближенное решение  $v$  как элемент конечномерного подпространства  $K_n$  по формуле (14.21), следует искать как решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} L\varphi_1 |_{x=x_1} & L\varphi_2 |_{x=x_1} & \dots & L\varphi_n |_{x=x_1} \\ L\varphi_1 |_{x=x_2} & L\varphi_2 |_{x=x_2} & \dots & L\varphi_n |_{x=x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L\varphi_1 |_{x=x_n} & L\varphi_2 |_{x=x_n} & \dots & L\varphi_n |_{x=x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f |_{x=x_1} \\ f |_{x=x_2} \\ \dots \\ f |_{x=x_n} \end{bmatrix} \quad (14.23)$$

### Доказательство

Подставим приближенное решение  $v$  в виде (14.21) в уравнения (4.22):

$$L \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right] - f = 0 \text{ для всех } x_j, j = 1, \dots, n \quad (14.24)$$

Выносим знак суммирования из-под знака линейного оператора:

$$\sum_{i=1}^n L[\alpha_i \varphi_i] - f = 0 \text{ для всех } x_j, j = 1, \dots, n \quad (14.25)$$

Затем из-под знака линейного оператора выносим коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] - f = 0 \text{ для всех } x_j, j = 1, \dots, n \quad (14.26)$$

Система уравнений (14.26) представляет собой СЛАУ с **неизвестными**  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ . Если СЛАУ записать в векторном виде, получим (14.23).

#### 14.1.4. Метод наименьших квадратов (для дифференциальных уравнений)

Рассмотрим еще один метод выбора приближенного решения  $v$  в подпространстве  $K_n$ . Этот **метод наименьших квадратов** (МНК).

В связи с тем, что МНК используется не только для приближенного решения дифференциальных уравнений, но также для приближения функций и обработки экспериментальных данных, в названии раздела (в скобках) уточнено назначение метода.

**Как и в предыдущих случаях, приближенное решение  $v$  будет найдено в подпространстве  $K_n$  в виде линейной комбинации базисных функций:**

$$v = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n \quad (14.27)$$

**За счет соответствия базисных функций граничным условиям задачи (14.6) гарантировано точное соответствие  $v$  граничным условиям данной задачи.**

**Определение 4.** **Метод наименьших квадратов** (для решения дифференциальных уравнений) состоит в следующем: приближенное решение  $v$ , найденное в подпространстве  $K_n$ , должно обеспечить **минимально возможную невязку дифференциального уравнения (14.6) в норме гильбертова пространства  $H$  в подпространстве  $K_n$ :**

$$\|Lv - f\|_H \xrightarrow{v \in K_n} \min \quad (14.28)$$

Минимизация функционала осуществляется по всем элементам  $v$ , принадлежащим конечномерному подпространству  $K_n$ .

**Утверждение 4.** Пусть базисные функции  $\varphi_i \in K, i = 1, \dots, n$  подпространства  $K_n$ , выбраны так, что элементы  $L\varphi_i \in H, i = 1, \dots, n$ , линейно независимы. Тогда приближенное решение задачи (14.6), обеспечивающее в классе  $K_n$  минимальную невязку (14.28), существует и единственно, а коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  разложения  $v$  по базисным функциям  $\varphi_i \in K, i = 1, \dots, n$  являются решением СЛАУ

$$\begin{bmatrix} (L\varphi_1, L\varphi_1)_H & (L\varphi_1, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_1, L\varphi_n)_H \\ (L\varphi_2, L\varphi_1)_H & (L\varphi_2, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_2, L\varphi_n)_H \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (L\varphi_n, L\varphi_1)_H & (L\varphi_n, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_n, L\varphi_n)_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L\varphi_1, f)_H \\ (L\varphi_2, f)_H \\ \dots \\ (L\varphi_n, f)_H \end{bmatrix} \quad (14.29)$$

СЛАУ (14.29) называют **нормальной системой уравнений**.

Здесь символом  $(*,*)_H$  обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $H$ .

### Доказательство

Заменяем задачу (14.28) о минимизации нормы невязки на эквивалентную задачу минимизации квадрата нормы невязки:

$$\|Lv - f\|_H^2 = (Lv - f, Lv - f)_H \rightarrow \min \quad (14.30)$$

Так как минимизация проводится по элементам из  $K_n$  и все элементы  $K_n$  записываются в виде (14.27), функционал задачи следует рассматривать как зависящий от параметров  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ .

Функционал (14.30) обозначим  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Тогда (14.30) записывается в виде

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow \min_{\alpha \in R^n}. \quad (14.31)$$

Точки, подозрительные на экстремум, находим из условий

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (14.32)$$

Систему уравнений (14.32) называют **нормальной системой уравнений**.

**Этапы доказательства Утверждения 4 состоят в следующем:**

- 1) линейная независимость элементов  $L\varphi_i \in H, i = 1, \dots, n$  обеспечивает существование и единственность решения нормальной системы уравнений (14.32)
- 2) в силу линейной независимости элементов  $L\varphi_i \in H, i = 1, \dots, n$ , единственное решение системы (14.32) является точкой локального минимума
- 3) в силу свойств функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , локальный минимум является глобальным.

**Пройдем перечисленные этапы.**

### Шаг I

Выясним, как выглядит  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Для этого в функционал задачи (14.30) подставим формулу (14.27):

$$\begin{aligned}
S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (Lv - f, Lv - f)_H = \\
&= (L [\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i] - f, L [\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j] - f)_H
\end{aligned} \tag{14.33}$$

Затем используем **линейные свойства дифференциального оператора**: вынесем знак суммирования из-под знака оператора и вынесем из-под знака оператора коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
&(L [\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i] - f, L [\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j] - f)_H = \\
&= (\sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] - f, \sum_{j=1}^n \alpha_j [L\varphi_j] - f)_H
\end{aligned}$$

Раскрывая скалярное произведение, получим

$$(f, f)_H + (\sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i], \sum_{j=1}^n \alpha_j [L\varphi_j])_H - 2 (\sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i], f)_H$$

Далее используем **линейные свойства скалярного произведения**: сначала из-под знаков скалярных произведений выносим знаки суммирования

$$(f, f)_H - 2 \sum_{i=1}^n (\alpha_i [L\varphi_i], f)_H + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i [L\varphi_i], \alpha_j [L\varphi_j])_H$$

Затем за скобками скалярных произведений должны оказаться числовые коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$

$$(f, f)_H - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (L\varphi_i, f)_H + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j (L\varphi_i, L\varphi_j)_H$$

**Таким образом, показано, что функционал  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  является квадратичной функцией относительно своих аргументов  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ :**

$$\begin{aligned}
S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \\
&= (f, f)_H - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (L\varphi_i, f)_H + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j (L\varphi_i, L\varphi_j)_H
\end{aligned} \tag{14.34}$$

## Шаг II

**Исследуем нормальную систему уравнений (14.32):**

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, \dots, n$$

Ее решения являются точками, подозрительными на экстремум.

Используя формулу (14.34), запишем частные производные функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -2(L\varphi_1, f)_H + 2\alpha_1(L\varphi_1, L\varphi_1)_H + 2 \sum_{j=2}^n \alpha_j (L\varphi_1, L\varphi_j)_H \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -2(L\varphi_2, f)_H + 2\alpha_2(L\varphi_2, L\varphi_2)_H + 2 \sum_{j=1, j \neq 2}^n \alpha_j (L\varphi_2, L\varphi_j)_H \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_n} = -2(L\varphi_n, f)_H + 2\alpha_n(L\varphi_n, L\varphi_n)_H + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (L\varphi_n, L\varphi_j)_H \end{array} \right.$$

Приравниваем каждую из частных производных к нулю, полученные выражения делим на 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -(L\varphi_1, f)_H + \alpha_1(L\varphi_1, L\varphi_1)_H + \sum_{j=2}^n \alpha_j (L\varphi_1, L\varphi_j)_H = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -(L\varphi_2, f)_H + \alpha_2(L\varphi_2, L\varphi_2)_H + \sum_{j=1, j \neq 2}^n \alpha_j (L\varphi_2, L\varphi_j)_H = 0 \\ \dots \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \alpha_n} = -(L\varphi_n, f)_H + \alpha_n(L\varphi_n, L\varphi_n)_H + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (L\varphi_n, L\varphi_j)_H = 0 \end{array} \right.$$

Слагаемые, не зависящие от коэффициентов  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ , переносим в правую часть каждого уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(L\varphi_1, L\varphi_1)_H + \sum_{j=2}^n \alpha_j (L\varphi_1, L\varphi_j)_H = (L\varphi_1, f)_H \\ \alpha_2(L\varphi_2, L\varphi_2)_H + \sum_{j=1, j \neq 2}^n \alpha_j (L\varphi_2, L\varphi_j)_H = (L\varphi_2, f)_H \\ \dots \\ \alpha_n(L\varphi_n, L\varphi_n)_H + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (L\varphi_n, L\varphi_j)_H = (L\varphi_n, f)_H \end{array} \right.$$

Получена СЛАУ с неизвестными  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ . Если записать ее в векторном виде, получим (14.29):

$$\begin{bmatrix} (L\varphi_1, L\varphi_1)_H & (L\varphi_1, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_1, L\varphi_n)_H \\ (L\varphi_2, L\varphi_1)_H & (L\varphi_2, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_2, L\varphi_n)_H \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (L\varphi_n, L\varphi_1)_H & (L\varphi_n, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_n, L\varphi_n)_H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L\varphi_1, f)_H \\ (L\varphi_2, f)_H \\ \dots \\ (L\varphi_n, f)_H \end{bmatrix}$$



Матрица СЛАУ является матрицей Грама линейно независимых элементов  $L\varphi_i \in H, i = 1, \dots, n$ .

$$Gr(L\varphi_1, L\varphi_2 \dots L\varphi_n) = \begin{bmatrix} (L\varphi_1, L\varphi_1)_H & (L\varphi_1, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_1, L\varphi_n)_H \\ (L\varphi_2, L\varphi_1)_H & (L\varphi_2, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_2, L\varphi_n)_H \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (L\varphi_n, L\varphi_1)_H & (L\varphi_n, L\varphi_2)_H & \dots & (L\varphi_n, L\varphi_n)_H \end{bmatrix}$$

Поэтому указанная матрица не вырождена и положительно определена:

$$\det Gr(L\varphi_1, L\varphi_2 \dots L\varphi_n) \neq 0$$

$$Gr(L\varphi_1, L\varphi_2 \dots L\varphi_n) > 0$$

Отсюда следует, что решение СЛАУ (14.29) при любой правой части дифференциального уравнения (14.6) существует и единственно.

Функционал  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  имеет единственную точку, подозрительную на экстремум.

### Шаг III

Исследуем критическую точку с помощью матрицы вторых частных производных.

$$S''(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_n \partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_n^2} \end{bmatrix}$$

Вычисляя производные, убеждаемся в том, что для функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  матрица  $S''(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$  с точностью до множителя 2 совпадает с матрицей Грама линейно независимых элементов  $L\varphi_i \in H, i = 1, \dots, n$ :

$$S''(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = 2 \cdot Gr(L\varphi_1, L\varphi_2 \dots L\varphi_n) \quad (14.35)$$

Приведем примеры совпадения их элементов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1^2} = 2(L\varphi_1, L\varphi_1)_H \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 2(L\varphi_1, L\varphi_2)_H \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_n} = 2(L\varphi_1, L\varphi_n)_H \\ \dots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_n^2} = 2(L\varphi_n, L\varphi_n)_H \end{array} \right.$$

Из (14.35) следует, что матрица  $S''(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , во-первых, не зависит от коэффициентов  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ ; во-вторых, положительно определена:

$$S''(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = S'' > 0 \quad (14.36)$$

Таким образом, точка, подозрительная на экстремум, является точкой локального минимума.

Иными словами, решение нормальной системы уравнений (14.29) является точкой локального минимума функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

#### Шаг IV

Покажем, что локальный минимум функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  является решением задачи (14.32), то есть **глобальным минимумом**  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Доказательство использует свойства **квадратичной** функции и **положительную определенность** матрицы  $S''$ .

Для удобства будем записывать функционал  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , у которого  $n$  скалярных аргументов, как функционал  $S(\alpha)$  с одним векторным аргументом  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$ . Рассмотрим аргументы  $\alpha \in R^n$  и  $\alpha + h$ , где  $h \in R^n$ .

По формуле Тейлора для  $\forall \alpha \in R^n, \forall h \in R^n$  верно

$$S(\alpha + h) = S(\alpha) + (S'(\alpha), h) + \frac{1}{2} \cdot (S''(\alpha) h, h) \quad (14.37)$$

потому что зависимость  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  от скалярных аргументов  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  является квадратичной.

Здесь  $S'(\alpha)$  – градиент, вычисленный в точке  $\alpha \in R^n$ ,  $S''(\alpha)$  – матрица вторых частных производных, вычисленная в точке  $\alpha \in R^n$ .

В силу квадратичного характера зависимости  $S(\alpha)$  никаких других слагаемых в формуле Тейлора нет.

Выше было отмечено, что элементы матрицы вторых частных производных не зависят от  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ . Поэтому запишем матрицу без аргумента:

$$S''(\alpha) = S''.$$

В качестве  $\alpha \in R^n$  рассмотрим найденную выше точку локального минимума, а любую другую точку пространства  $R^n$  будем записывать в виде  $\alpha + h$ , где  $h \in R^n$ .

Так как в точке локального минимума градиент обращается в ноль, запишем

$$S'(\alpha) = 0$$

Так как  $S''$  положительно определена, для  $\forall h \neq 0, h \in R^n$  верно

$$(S'' h, h) > 0$$

Поэтому справедливо неравенство

$$S(\alpha + h) = S(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot (S'' h, h) > S(\alpha) \quad (14.38)$$

Таким образом, в любой точке из пространства  $R^n$ , не совпадающей с точкой локального минимума  $\alpha$ , значение функционала **больше**, чем в точке локального минимума.

**Следовательно, локальный минимум функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  является глобальным минимумом, и задача оптимизации (14.32) решена.**

**14.1.5. Конечномерный метод наименьших квадратов  
(для решения дифференциальных уравнений)**

Разберем еще одну модификацию метода наименьших квадратов. В данном случае невязка на приближенном решении оценивается на некоторой **конечной заранее выбранной системе точек**. Метод называют **конечномерным МНК**.

Приближенное решение  $v$  задачи (14.6) ищем в виде

$$v = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n \quad (14.40)$$

Чтобы оценить невязку, выбираем точки  $x_j, j = 1, \dots, m, m > n$ .

На системе точек  $x_j, j = 1, \dots, m, m > n$  определим невязку  $Lv - f$  как элемент пространства  $R^m$ :

$$Lv - f = \begin{bmatrix} (Lv - f)|_{x=x_1} \\ (Lv - f)|_{x=x_2} \\ \dots \\ (Lv - f)|_{x=x_m} \end{bmatrix} \in R^m \quad (14.41)$$

Компонентой с номером  $j$  является значение невязки при  $x = x_j$ . Значения невязки при других значениях аргумента  $x$  не рассматриваем.

**Определение 5.** Конечномерный метод наименьших квадратов (для решения дифференциальных уравнений) состоит в следующем:

приближенное решение  $v$ , найденное в подпространстве  $K_n$ , должно обеспечить в указанном подпространстве **минимально возможную невязку дифференциального уравнения на выбранной системе точек  $x_j, j = 1, \dots, m, m > n$  в норме пространства**

$R^m$ :

$$\| Lv - f \|_{R^m} \rightarrow \min \quad (14.42)$$

Минимизация функционала (14.42) осуществляется по всем элементам  $v$ , принадлежащим конечномерному подпространству  $K_n$ .

Чтобы сформулировать утверждение о свойствах метода, используем точки  $x_j, j = 1, \dots, m, m > n$  и определим элементы  $f \in R^m$  и  $L_i \in R^m, i = 1, \dots, n$ :

$$f = \begin{bmatrix} f|_{x=x_1} \\ f|_{x=x_2} \\ \dots \\ f|_{x=x_m} \end{bmatrix} \in R^m, \quad L_1 = \begin{bmatrix} L\varphi_1|_{x=x_1} \\ L\varphi_1|_{x=x_2} \\ \dots \\ L\varphi_1|_{x=x_m} \end{bmatrix} \in R^m, \quad \dots, \quad L_n = \begin{bmatrix} L\varphi_n|_{x=x_1} \\ L\varphi_n|_{x=x_2} \\ \dots \\ L\varphi_n|_{x=x_m} \end{bmatrix} \in R^m \quad (14.43)$$

Элемент  $f \in R^m$  представляет собой вектор значений функции  $f$  – правой части дифференциального уравнения (14.6), на выбранной системе точек. Так как выбрано  $m$  точек, размерность вектора составила  $m$ .

Элемент  $L_i \in R^m$  представляет собой вектор значений оператора  $L$ , примененного к базисной функции  $\varphi_i$ . Значения функционала  $L\varphi_i$  рассматриваются только при  $x_j, j = 1, \dots, m, m > n$ . Так как выбрано  $m$  точек, размерность  $L_i$  составила  $m$

**Утверждение 5.** Пусть базисные функции  $\varphi_i \in K, i = 1, \dots, n$  подпространства  $K_n$ , и точки  $x_j, j = 1, \dots, m, m > n$  выбраны так, что элементы  $L_i \in R^m, i = 1, \dots, n$ , линейно независимы.

Тогда приближенное решение задачи (14.6), обеспечивающее в классе  $K_n$  на системе точек  $x_j, j = 1, \dots, m, m > n$  минимальную невязку (14.42), существует и единственно, а коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  разложения  $v$  по базисным функциям  $\varphi_i \in K, i = 1, \dots, n$  являются решением СЛАУ

$$\begin{bmatrix} (L_1, L_1)_{R^m} & (L_1, L_2)_{R^m} & \dots & (L_1, L_n)_{R^m} \\ (L_2, L_1)_{R^m} & (L_2, L_2)_{R^m} & \dots & (L_2, L_n)_{R^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (L_n, L_1)_{R^m} & (L_n, L_2)_{R^m} & \dots & (L_n, L_n)_{R^m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_1, f)_{R^m} \\ (L_2, f)_{R^m} \\ \dots \\ (L_n, f)_{R^m} \end{bmatrix} \quad (14.44)$$

СЛАУ (14.44) называют **нормальной системой уравнений**.

Здесь символом  $(*, *)_{R^m}$  обозначено скалярное произведение в пространстве  $R^m$ .

### Доказательство (схема)

Заменим задачу (14.42) о минимизации нормы невязки на эквивалентную задачу минимизации квадрата нормы невязки:

$$\|Lv - f\|_{R^m}^2 = (Lv - f, Lv - f)_{R^m} \rightarrow \min \quad (14.45)$$

Так как минимизация проводится по элементам из  $K_n$  и все элементы  $K_n$  записываются в виде (14.40), функционал задачи следует рассматривать как зависящий от параметров  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ .

Функционал задачи (14.45) обозначим  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Тогда (14.45) записывается в виде

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow \min_{\alpha \in R^n} \quad (14.46)$$

Точки, подозрительные на экстремум, находим из условий

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (14.47)$$

Систему уравнений (14.47) называют **нормальной системой уравнений**.

**Этапы доказательства Утверждения 5 состоят в следующем:**

- 1) линейная независимость элементов  $L_i \in R^m, i = 1, \dots, n$  обеспечивает существование и единственность решения нормальной системы уравнений (14.47);
- 2) в силу линейной независимости элементов  $L_i \in R^m, i = 1, \dots, n$  единственное решение системы (14.47) является точкой локального минимума;
- 3) в силу свойств функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  локальный минимум является глобальным.

**Кратко пройдем эти этапы.**

### Шаг I

**Выясним, как выглядит невязка  $Lv - f$  как элемент пространства  $R^m$ .**

Для этого запишем невязку на приближенном решении  $v$  по определению, подставим решение  $v$  в виде (14.40) и воспользуемся свойством линейности дифференциального оператора  $L$ :

$$Lv - f = L \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i}_{\text{линейный оператор применили к линейной комбинации элементов и получили линейную комбинацию результатов применения оператора к каждому из элементов}} - f = \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] - f \quad (14.48)$$

Таким образом, невязка на приближенном решении  $v$  записана через коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ .

**Далее в соответствии с определением (14.41) запишем невязку на системе точек  $x_j, j = 1, \dots, m$ , то есть как элемент конечномерного пространства  $R^m$ .**

Для этого компоненту невязки с номером  $j, j = 1, \dots, m$  записываем как значение (14.48), вычисленное в точке  $x_j, j = 1, \dots, m$ :

$$Lv - f = \begin{bmatrix} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] - f \right\} |_{x=x_1} \\ \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] - f \right\} |_{x=x_2} \\ \dots \\ \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] - f \right\} |_{x=x_m} \end{bmatrix}$$

Вектор невязки  $Lv - f$  может быть представлен в виде разности двух векторов:

$$Lv - f = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] |_{x=x_1} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] |_{x=x_2} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i [L\varphi_i] |_{x=x_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f |_{x=x_1} \\ f |_{x=x_2} \\ \dots \\ f |_{x=x_m} \end{bmatrix}$$

Для первого вектора компонента с номером  $j$  представляет собой линейную комбинацию значений оператора, примененного к различным базисным функциям  $\varphi_i \in K, i = 1, \dots, n$ , но вычисленных в одной и той же точке  $x_j$ .

Коэффициенты всех линейных комбинаций одинаковы, поэтому в соответствии с определением (14.43) первый из векторов может быть переписан в виде

$$Lv - f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \begin{bmatrix} [L\varphi_i] |_{x=x_1} \\ [L\varphi_i] |_{x=x_2} \\ \dots \\ [L\varphi_i] |_{x=x_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f |_{x=x_1} \\ f |_{x=x_2} \\ \dots \\ f |_{x=x_m} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i - f$$

Таким образом, для элемента  $v$  из  $K_n$ , представленного в виде линейной комбинации базисных функций  $\varphi_i \in K, i = 1, \dots, n$  по формуле

$$v = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n$$

невязка  $Lv - f$  на системе точек  $x_j, j = 1, \dots, m$  как элемент  $R^m$  есть

линейная комбинация векторов  $L_i \in R^m, i = 1, \dots, n$

с теми же коэффициентами:

$$Lv - f = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i - f \quad (14.49)$$

## Шаг II

Используем (14.49) и выясним, как выглядит  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

$$\begin{aligned} S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= (Lv - f, Lv - f)_{R^m} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i - f, \sum_{j=1}^n \alpha_j L_j - f \right)_{R^m} = \\ &= (f, f)_{R^m} + \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j L_j \right)_{R^m} - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (L_i, f)_{R^m} \end{aligned}$$

Оказалось, что  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  является квадратичной функцией относительно коэффициентов  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \\ &= (f, f)_{R^m} - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (L_i, f)_{R^m} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j (L_i, L_j)_{R^m} \end{aligned} \quad (14.50)$$

Функционал  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  устроен так же, как и функционал (14.34). Только вместо скалярных произведений в бесконечномерном гильбертовом пространстве  $H$  задействованы скалярные произведения в конечномерном пространстве  $R^m$ .

## Шаг III и далее

Точки, подозрительные на экстремум, находим из условия

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, \dots, n$$

Нормальная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -2(L_1, f)_{R^m} + 2\alpha_1(L_1, L_1)_{R^m} + 2 \sum_{j=2}^n \alpha_j (L_1, L_j)_{R^m} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -2(L_2, f)_{R^m} + 2\alpha_2(L_2, L_2)_{R^m} + 2 \sum_{j=1, j \neq 2}^n \alpha_j (L_2, L_j)_{R^m} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_n} = -2(L_n, f)_{R^m} + 2\alpha_n(L_n, L_n)_{R^m} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (L_n, L_j)_{R^m} = 0 \end{cases}$$



Это СЛАУ с неизвестными  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ . Если ее записать в векторном виде, получим (14.44):

$$\begin{bmatrix} (L_1, L_1)_{R^m} & (L_1, L_2)_{R^m} & \dots & (L_1, L_n)_{R^m} \\ (L_2, L_1)_{R^m} & (L_2, L_2)_{R^m} & \dots & (L_2, L_n)_{R^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (L_n, L_1)_{R^m} & (L_n, L_2)_{R^m} & \dots & (L_n, L_n)_{R^m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_1, f)_{R^m} \\ (L_2, f)_{R^m} \\ \dots \\ (L_n, f)_{R^m} \end{bmatrix}$$

Матрица СЛАУ (14.44) является матрицей Грама линейно независимых векторов  $L_i \in R^m, i = 1, \dots, n$ :

$$Gr(L_1, L_2 \dots L_n) = \begin{bmatrix} (L_1, L_1)_{R^m} & (L_1, L_2)_{R^m} & \dots & (L_1, L_n)_{R^m} \\ (L_2, L_1)_{R^m} & (L_2, L_2)_{R^m} & \dots & (L_2, L_n)_{R^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (L_n, L_1)_{R^m} & (L_n, L_2)_{R^m} & \dots & (L_n, L_n)_{R^m} \end{bmatrix}$$

Поэтому указанная матрица не вырождена и положительно определена:

$$\det Gr(L_1, L_2 \dots L_n) \neq 0$$

$$Gr(L_1, L_2 \dots L_n) > 0$$

Отсюда следует, что решение СЛАУ (14.44) при любой правой части дифференциального уравнения (14.6) существует и единственно.

Функционал  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  имеет единственную точку, подозрительную на экстремум.

**Аналогично Утверждению 4 доказывается:**

Точка, подозрительная на экстремум, является точкой локального минимума функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Решение нормальной системы уравнений (14.44), являясь точкой локального минимума функционала  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , является решением задачи минимизации (14.42), то есть глобальным минимумом  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Считаем, что Утверждение 5 доказано.

## Модуль 14.1 – Практикум по теме «Примеры методов решения краевых задач, основанных на решении задач оптимизации: вариационно-проекционные методы»

### Пример 1 – Метод Бубнова-Галеркина

1) Решите краевую задачу

$$\begin{cases} w'' + x w' + w = 2x, & x \in (0; 1) \\ w(0) = 1, & w(1) = 0. \end{cases}$$

приближенно методом Бубнова-Галеркина и запишите приближенное решение  $w_{np.}(x)$ .

Для его построения используйте базисные функции

$$\varphi_1(x) = x(x-1), \varphi_2(x) = x^2(1-x), \varphi_3(x) = x^3(1-x)$$

2) Используя математический пакет, on-line сервис или свои программные средства, постройте график приближенного решения  $w_{np.}(x)$ .

### Решение (схема)

#### Шаг 1

Метод Бубнова-Галеркина можно применять для решения линейного дифференциального уравнения с линейными однородными граничными условиями.

Приведенная выше задача является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка, но имеет линейные неоднородные граничные условия.

Чтобы построить задачу нужного типа, запишем искомое решение  $w(x)$  в виде

$$w(x) = u(x) + ax + b.$$

Коэффициенты  $a, b$  подберем таким образом, чтобы **линейная функция**  $ax + b$  соответствовала заданным выше неоднородным граничным условиям.

Для  $x = 0$  получим  $a \cdot 0 + b = 1$ , то есть  $b = 1$

Для  $x = 1$  получим  $a \cdot 1 + b = 0$ , то есть  $a = -1$ .

Следовательно,

$$w(x) = u(x) + 1 - x$$

Подставим выражение для  $w(x)$  в дифференциальное уравнение и граничные условия:

$$\begin{cases} u'' + (1-x)u' + (u+1-x) = 2x, & x \in (0; 1) \\ u(0) + 1 - 0 = 1, & u(1) + 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Для неизвестной функции  $u(x)$  получим дифференциальное уравнение с линейными однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} u'' + x u' + u = 4x - 1, & x \in (0; 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases}$$

Именно это уравнение предстоит решить приближенно методом Бубнова-Галеркина.

## Шаг 2

Краевую задачу для функции  $u(x)$  рассматриваем в гильбертовом пространстве

$$H = L_2[0; 1] \text{ (отрезок } [0; 1] \text{ взят из краевой задачи).}$$

Решение уравнения ищем в пространстве  $K : u \in K \subset H$ .

Это функциональное пространство, к элементам которого можно применять операции дифференцирования, указанные в левой части дифференциального уравнения.

Чтобы воспользоваться методом, краевую задачу нужно записать в общем виде

$$\begin{cases} Lu = f \\ lu = 0 \end{cases}$$

где  $L$  – линейный дифференциальный оператор, который действует из  $K$  в  $H$ , через  $l$  обозначен линейный оператор, «отвечающий» за граничные условия, правая часть уравнения  $f$  задана и является элементом пространства  $L_2[0; 1]$

В данной задаче

$$L = [ ]'' + x \cdot [ ]' + [ ],$$

то есть применение оператора  $L$  к некоторому элементу  $v \in K$  есть

$$Lv = v'' + x \cdot v' + v$$

Правая часть уравнения есть

$$f = 4x - 1$$

Оператор  $l$  ставит в соответствие элементу  $v \in K$  его значение при  $x = 0$  и его значение при  $x = 1$ .

Линейные свойства операторов  $L$  и  $l$  можно проверить «по определению»:

например, показать, что для любых элементов  $u, v \in K$  и любых чисел  $\alpha, \beta$

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha(Lu) + \beta(Lv)$$

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha(lu) + \beta(lv)$$

### Шаг 3

Предложенные выше базисные функции

$$\varphi_1(x) = x(x-1), \varphi_2(x) = x^2(1-x), \varphi_3(x) = x^3(1-x)$$

запишем в виде

$$\varphi_i(x) = x^i(x-1) = x^{i+1} - x^i, \quad i = 1, 2, 3$$

Эти функции соответствуют линейным однородным граничным условиям:

$$\varphi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\varphi_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Функции  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  являются элементами каждого из функциональных пространств: и пространства  $L_2[0; 1]$ , и пространства  $K$ . К этим функциям можно применить оператор  $L$ .

$$L\varphi_1(x) = [x^2 - x]'' + x \cdot [x^2 - x]' + [x^2 - x]$$

$$L\varphi_2(x) = [x^3 - x^2]'' + x \cdot [x^3 - x^2]' + [x^3 - x^2]$$

$$L\varphi_3(x) = [x^4 - x^3]'' + x \cdot [x^4 - x^3]' + [x^4 - x^3]$$

Нетрудно убедиться, что

$$L\varphi_1(x) = 2 + (2x^2 - x) + (x^2 - x) = 3x^2 - 2x + 2$$

$$L\varphi_2(x) = (6x - 2) + (3x^3 - 2x^2) + (x^3 - x^2) = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 2$$

$$L\varphi_3(x) = (12x^2 - 6x) + (4x^4 - 3x^3) + (x^4 - x^3) = 5x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 6x$$

(эти формулы будут нужны при отыскании приближенного решения).

На основе базисных функций определим подпространство  $K_3$  размерности 3, в котором должно быть найдено приближенное решение  $v(x)$ .

Это подпространство включает все элементы вида

$$v = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – числа.

#### Шаг 4

Приближенное решение  $v$ , найденное в классе  $K_3$  методом Бубнова-Галеркина, должно обеспечить **ортогональность невязки всем базисным функциям**.

$$(Lv - f, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = 0$$

$$(Lv - f, \varphi_2)_{L_2[0;1]} = 0$$

$$(Lv - f, \varphi_3)_{L_2[0;1]} = 0$$

В соответствии с Утверждением 2, Модуль 14.1, коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, 2, 3,$ , определяющие приближенное решение  $v$  как элемент  $K_3$  следует искать как решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot \varphi_1 dx & \int_0^1 (L\varphi_2) \cdot \varphi_1 dx & \int_0^1 (L\varphi_3) \cdot \varphi_1 dx \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot \varphi_2 dx & \int_0^1 (L\varphi_2) \cdot \varphi_2 dx & \int_0^1 (L\varphi_3) \cdot \varphi_2 dx \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \\ \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot \varphi_3 dx & \int_0^1 (L\varphi_2) \cdot \varphi_3 dx & \int_0^1 (L\varphi_3) \cdot \varphi_3 dx \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \int_0^1 (4x-1)(x^2-x) dx \\ 0 \\ 1 \\ \int_0^1 (4x-1)(x^3-x^2) dx \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \int_0^1 (4x-1)(x^4-x^3) dx \\ 0 \end{bmatrix}$$

Поясним, как получены элементы матрицы и правой части СЛАУ, и как они должны быть вычислены.

Например, элемент первой строки первого столбца матрицы СЛАУ определяется скалярным произведением элементов  $L\varphi_1(x)$  и  $\varphi_1(x)$  в  $L_2[0;1]$ :

$$(L\varphi_1, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot \varphi_1 dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 2)(x^2 - x) dx$$

Первый элемент правой части СЛАУ определяется скалярным произведением элементов  $f(x)$  и  $\varphi_1(x)$  в  $L_2[0; 1]$ :

$$(f, \varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 f \cdot \varphi_1 dx = \int_0^1 (4x - 1)(x^2 - x) dx$$

### Шаг 5

Чтобы решить задачу методом Бубнова-Галеркина, нужно вычислить элементы матрицы и элементы правой части СЛАУ и затем решить СЛАУ (ее размерность  $3 \times 3$ ).

### Ответ

Решение задачи с однородными граничными условиями запишется в виде

$u(x) \sim v(x)$ , где

$$v(x) = \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3 - x^2) + \alpha_3(x^4 - x^3)$$

Решение исходного дифференциального уравнения с неоднородными граничными условиями следует записать в виде

$w(x) \sim v(x) + 1 - x$ , где

$$v(x) = \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3 - x^2) + \alpha_3(x^4 - x^3)$$

## Пример 2 – Метод наименьших квадратов

1) Решите краевую задачу

$$\begin{cases} w'' + x w' + w = 2x, & x \in (0; 1) \\ w(0) = 1, & w(1) = 0. \end{cases}$$

приближенно **методом наименьших квадратов** и запишите приближенное решение  $w_{np.}(x)$ . Для его построения используйте базисные функции

$$\varphi_1(x) = x(x-1), \varphi_2(x) = x^2(1-x), \varphi_3(x) = x^3(1-x)$$

2) Используя математический пакет, on-line сервис или свои программные средства, постройте график приближенного решения  $w_{np.}(x)$ .

**Если нужно решить ту же самую задачу методом наименьших квадратов, отличия решений будут на шаге 4**

### Шаг 4

Другой принцип отыскания решения:

Приближенное решение  $v$ , найденное в классе  $K_3$  методом наименьших квадратов, должно обеспечить **минимально возможную невязку дифференциального уравнения в норме гильбертова пространства  $L_2[0; 1]$  в подпространстве  $K_3$**  :

$$\|Lv - f\|_{L_2[0; 1]} \xrightarrow{v \in K_3} \min$$

Другая СЛАУ для поиска неизвестных коэффициентов:

В соответствии с Утверждением 4, Модуль 14.1, коэффициенты  $\alpha_i, i = 1, 2, 3,$ , определяющие приближенное решение  $v$  как элемент  $K_3$  следует искать как решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (L\varphi_1)^2 dx & \int_0^1 (L\varphi_2) \cdot (L\varphi_1) dx & \int_0^1 (L\varphi_3) \cdot (L\varphi_1) dx \\ \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot (L\varphi_2) dx & \int_0^1 (L\varphi_2)^2 dx & \int_0^1 (L\varphi_3) \cdot (L\varphi_2) dx \\ \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot (L\varphi_3) dx & \int_0^1 (L\varphi_2) \cdot (L\varphi_3) dx & \int_0^1 (L\varphi_3)^2 dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 (4x-1) (L\varphi_1) dx \\ \int_0^1 (4x-1) (L\varphi_2) dx \\ \int_0^1 (4x-1) (L\varphi_3) dx \end{bmatrix}$$

Поясним, как получены элементы матрицы и правой части СЛАУ, и как они должны быть вычислены.

Например, элемент первой строки первого столбца матрицы СЛАУ определяется скалярным квадратом элемента  $L\varphi_1(x)$  в  $L_2[0; 1]$ :

$$(L\varphi_1, L\varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot (L\varphi_1) dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 2)^2 dx$$

Элемент первой строки второго столбца матрицы СЛАУ определяется скалярным произведением элементов  $L\varphi_1(x)$  и  $L\varphi_2(x)$  в  $L_2[0; 1]$ :

$$(L\varphi_1, L\varphi_2)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 (L\varphi_1) \cdot (L\varphi_2) dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 2)(4x^3 - 3x^2 + 6x - 2) dx$$

Первый элемент правой части СЛАУ определяется скалярным произведением элементов  $f(x)$  и  $L\varphi_1(x)$  в  $L_2[0; 1]$ :

$$(f, L\varphi_1)_{L_2[0;1]} = \int_0^1 f \cdot (L\varphi_1) dx = \int_0^1 (4x-1) (3x^2 - 2x + 2) dx$$



Последующие действия такие же, как в предыдущем методе.

### Шаг 5

Чтобы решить задачу методом наименьших квадратов, нужно вычислить элементы матрицы и элементы правой части СЛАУ и затем решить СЛАУ (ее размерность  $3 \times 3$ ).

### Ответ

Решение задачи с однородными граничными условиями запишется в виде

$u(x) \sim v(x)$ , где

$$v(x) = \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3 - x^2) + \alpha_3(x^4 - x^3)$$

Решение исходного дифференциального уравнения с неоднородными граничными условиями следует записать в виде

$w(x) \sim v(x) + 1 - x$ , где

$$v(x) = \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3 - x^2) + \alpha_3(x^4 - x^3)$$

## ЛИТЕРАТУРА

### а) литература по тематическому блоку

1. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов. – 2-е изд. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010. – 264 с.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
5. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 248 с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. – 368 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980 – 536 с.
8. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках / Под ред. проф. В.Н. Емельянова, д.ф.-м.н. К.Н. Волкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 416 с.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2000. – 316 с.
10. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 8. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 831Е.14.08.

### б) литература об организации учебного процесса по дисциплине

11. Садовничий В.А. Международный форум «Университеты, общество и будущее человечества». Доклад ректора МГУ имени М.В. Ломоносова академика В.А. Садовничего на Международном форуме «Университеты, общество и будущее человечества» 25 марта 2019 года. М.: Издательство Московского университета, 2019. – 36 с.
12. Высокопроизводительные параллельные вычисления. 100 заданий для расширенного лабораторного практикума. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 248 с.
13. Программы дисциплин по направлению «Прикладная математика и информатика». Учебно-методическое объединение Университетов. Учебно-методический совет по прикладной математике и информатике. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2002. С. 59 – 62.
14. Стронгина Н.Р. Цифровизация и качество обучения на примере фундаментальной дисциплины «Численные методы» // Научные вестн. 2021. №2 (31). – С. 85 – 103.

Наталья Романовна Стронгина

**КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»**

**Методы решения краевых задач,  
основанные на решении задач оптимизации:  
примеры вариационно-проекционных методов  
(Модуль 14.1)**

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.